

Тип статьи: научная  
УДК 629.3.01  
DOI: 10.35887/2305-2538-2024-5-113-128

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ БОКОВОГО СКОЛЬЖЕНИЯ КОЛЕСНОЙ МАШИНЫ ПРИ ПОВОРОТЕ

*Александр Николаевич Беляев*<sup>1</sup>, *Дмитрий Николаевич Афоничев*<sup>2</sup>,  
*Татьяна Владимировна Тришина*<sup>3</sup>, *Павел Викторович Шередекин*<sup>4</sup>,  
<sup>1,2,3,4</sup> Воронежский государственный аграрный университет имени императора Петра I,  
г. Воронеж, Российская Федерация  
<sup>1</sup>aifkm\_belyaev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9195-7091>  
<sup>2</sup>dmafonichev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9066-6428>  
<sup>3</sup>t.v.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9976-979X>  
<sup>4</sup>pavel.sheredekin@syngenta.com, <https://orcid.org/0009-0007-2852-5844>

Автор, ответственный за переписку: Александр Николаевич Беляев, aifkm\_belyaev@mail.ru  
Corresponding author: Alexander Belyaev, aifkm\_belyaev@mail.ru

**Реферат.** *Определено условие возникновения бокового скольжения колесной машины при повороте. Представлены аналитические зависимости для определения радиуса поворота центра тяжести машины, как функции времени, курсового угла, ускорения и скорости бокового скольжения, увода машины в боковом направлении. Разработана математическая модель бокового скольжения колесной машины при повороте в программе SimInTech. Выполнено моделирование бокового скольжения колесной машины при повороте на 180°, на примере трактора Беларусь-80.1. Оно показывает, что увод машины в боковом направлении начинается в конце участка входа в поворот, когда радиус поворота центра тяжести машины существенно уменьшился, но по причине еще малых значений ускорения и скорости бокового скольжения увод на этом участке не существенный (для рассмотренного примера менее 1 см). В передлах участка установившегося поворота (при постоянном радиусе поворота центра тяжести машины) ускорение бокового скольжения является величиной постоянной, но скорость бокового скольжения нарастает и соответственно нарастает и увод машины в боковом направлении (для рассмотренного примера до 43 см). В начале участка выхода из поворота при несущественном возрастании радиуса поворота центра тяжести машины ускорение бокового скольжения уменьшается, но скорость бокового скольжения продолжает расти до момента, пока ускорение бокового скольжения не станет равным 0. По мере движения машины на участке выхода из поворота радиус поворота центра тяжести машины растет, ускорение бокового скольжения будет отрицательным и направлено в противоположную сторону от направления скорости бокового скольжения, последняя при этом снижается, но увод машины в боковом направлении продолжается, достигая максимального значения (для рассмотренного примера 1,12 м) при скорости бокового скольжения равной 0.*

**Ключевые слова:** *колесная машина, поворот, угол поворота управляемого колеса, радиус поворота центра тяжести машины, курсовой угол, боковое скольжение, ускорение, скорость, увод машины в боковом направлении, коэффициент сцепления.*

## MATHEMATICAL MODELING OF THE LATERAL SLIDING OF A WHEELED VEHICLE WHEN TURNING

*Alexander Belyaev*<sup>1</sup>, *Dmitry Afonichev*<sup>2</sup>, *Tatiana Trishina*<sup>3</sup>, *Pavel Sheredekin*<sup>4</sup>  
<sup>1,2,3,4</sup> Voronezh State Agrarian University named after Emperor Peter the Great,  
Voronezh, Russian Federation

<sup>1</sup>aifkm\_belyaev@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9195-7091>  
<sup>2</sup>dmafonichev@yandex.ru, <https://orcid.org/0000-0001-9066-6428>

<sup>3</sup>t.v.trishina@gmail.com, <https://orcid.org/0000-0001-9976-979X>  
<sup>4</sup>pavel.sheredekin@syngenta.com, <https://orcid.org/0009-0007-2852-5844>

**Abstract.** The condition for the occurrence of lateral sliding of a wheeled vehicle when turning is determined. Analytical dependences are presented to determine the radius of rotation of the center of gravity of the machine as a function of time, heading angle, acceleration and speed of lateral sliding, and lateral withdrawal of the machine. A mathematical model of the lateral sliding of a wheeled vehicle when turning in the SimInTech program has been developed. A simulation of the lateral sliding of a wheeled vehicle when turning 180 degrees was performed, using the example of the Belarus-80.1 tractor. It shows that the withdrawal of the car in the lateral direction begins at the end of the section of the entrance to the turn, when the radius of rotation of the center of gravity of the car has significantly decreased, but due to the still small values of acceleration and the speed of lateral sliding, the withdrawal in this section is not significant (for the example considered less than 1 cm). In the repartitions of the section of steady rotation (with a constant radius of rotation of the center of gravity of the machine), the acceleration of lateral sliding is constant, but the speed of lateral sliding increases and, accordingly, the withdrawal of the machine in the lateral direction increases (for the example under consideration up to 43 cm). At the beginning of the exit section of the turn, with an insignificant increase in the radius of rotation of the center of gravity of the machine, the acceleration of the side slide decreases, but the speed of the side slide continues to increase until the acceleration of the side slide becomes equal to 0. As the machine moves in the exit section of the turn, the radius of rotation of the center of gravity of the machine increases, the acceleration of the side slide will be negative and directed in the opposite direction from the direction of the side slide speed, the latter decreases, but the withdrawal of the machine in the side direction continues, reaching a maximum value (for the example considered 1.12 m) at a side slide speed equal to 0.

**Keywords:** wheeled vehicle, rotation, angle of rotation of the controlled wheel, radius of rotation of the center of gravity of the machine, heading angle, side slip, acceleration, speed, lateral movement of the machine, coefficient of adhesion.

**Для цитирования:** Беляев А.Н., Афоничев Д.Н., Тришина Т.В., Шередекин П.В. Математическое моделирование бокового скольжения колесной машины при повороте // Наука в Центральной России Science in the Central Russia. 2024. Т. 71, № 5. С. 113-128. <https://doi.org/10.35887/2305-2538-2024-5-113-128>.

**For citation:** Belyaev A., Afonichev D., Trishina T., Sheredekin P. Mathematical modeling of the lateral sliding of a wheeled vehicle when turning. *Nauka v central'noj Rossii = Science in the Central Russia*: 2024; 71(5): 113-128. (In Russ.) <https://doi.org/10.35887/2305-2538-2024-5-113-128>.

**Введение.** При совершении колесной машиной маневра поворота на нее действует центробежная сила [1], которая может вызвать боковое скольжение, и как следствие увод машины в боковом направлении [2, 3, 4].

В работе [1] получена аналитическая зависимость для определения ускорения бокового скольжения  $a$  колесной машины под действием нормальной силы инерции (рисунок 1)

$$a = \frac{v^2}{R} - g\varphi, \quad (1)$$

где  $v$  – скорость поступательного движения колесной машины, м/с;

$R$  – радиус поворота центра тяжести колесной машины, м;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;

$\varphi$  – коэффициент сцепления колес с опорной поверхностью в боковом направлении.

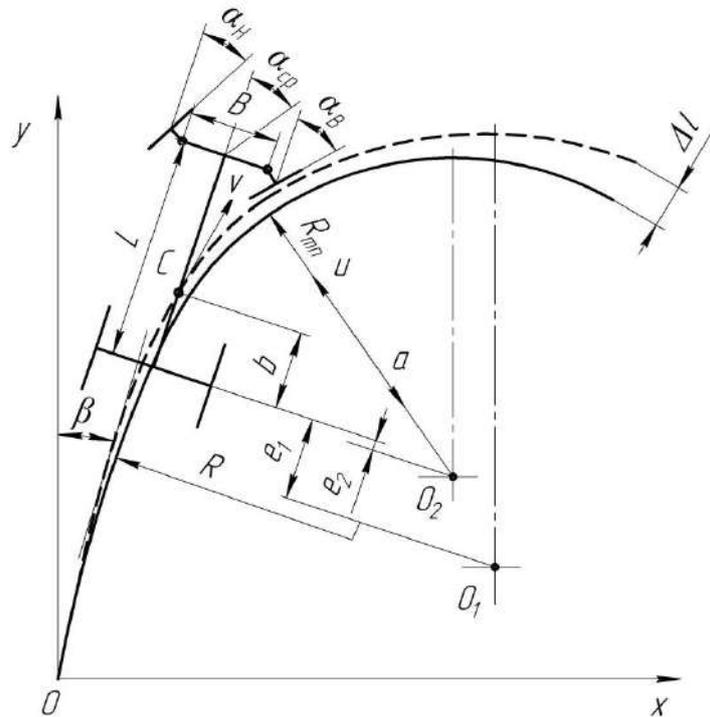


Рисунок 1 – Кинематическая схема поворота колесной машины

Если принять, что совершение маневра входа в поворот происходит при постоянной скорости поступательного движения колесной машины ( $v = \text{const}$ ) и при постоянном значении коэффициента сцепления в боковом направлении ( $\varphi = \text{const}$ ), то ускорение бокового скольжения  $a$  является функцией радиуса поворота центра тяжести  $R$ .

Радиус поворота центра тяжести  $R$  определяется по формуле [5]

$$R = \sqrt{(b+e)^2 + L^2 \text{ctg}^2 \alpha_{\text{CP}}}, \quad (2)$$

где  $b$  – расстояние от центра тяжести до задней оси машины, м;

$e$  – вылет мгновенного центра поворота, м;

$L$  – продольная (колесная) база машины, м;

$\alpha_{\text{CP}}$  – средний угол поворота управляемых колес, рад.

Для правильного поворота  $e = 0$ , а в случае фактического поворота, реализуемого рулевой трапецией,  $e$  рассчитывается по формуле [5]

$$e = B \frac{\text{tg} \alpha_B \text{tg} \alpha_H}{\text{tg} \alpha_B - \text{tg} \alpha_H} - L, \quad (3)$$

где  $B$  – расстояние между осями шкворней (шкворневая колея), м;

$\alpha_H$  – угол поворота наружного (внешнего) управляемого колеса, рад.;

$\alpha_B$  – угол поворота внутреннего управляемого колеса, рад.;

В работах [5, 6] также приведены формулы, связывающие углы  $\alpha_H$ ,  $\alpha_B$  и  $\alpha_{\text{CP}}$ :

$$\text{tg} \alpha_H = \frac{L \text{tg} \alpha_B}{L + B \text{tg} \alpha_B}; \quad \text{ctg} \alpha_{\text{CP}} = \frac{\text{ctg} \alpha_B + \text{ctg} \alpha_H}{2}. \quad (4)$$

Если принять, что угол поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$  является линейной функцией времени  $t$ , то есть  $\alpha_B = \alpha_{B0} + \omega_B t$  ( $\alpha_{B0}$  – начальное значение угла поворота внутреннего

управляемого колеса,  $\omega_B$  – угловая скорость поворота внутреннего управляемого колеса,  $c^{-1}$ ), то радиус поворота центра тяжести  $R$  будет функцией времени  $t$ .

**Методика исследования.** При совершении колесной машиной маневра поворота на  $180^\circ$  ( $\pi$  рад.) выделяются три характерных участка траектории движения [7]:

- вход в поворот, когда углы поворота управляемых колес  $\alpha_B, \alpha_H, \alpha_{CP}$  нарастают ( $\omega_B > 0$ ), при этом происходит движение по кривой переменного радиуса  $R$ , снижающегося от бесконечного значения до некоторого минимального значения  $R_{min}$ ;

- установившийся поворот, когда углы поворота управляемых колес  $\alpha_B, \alpha_H, \alpha_{CP}$  постоянные, стабильные ( $\omega_B = 0$ ), при этом движение происходит по круговой кривой с постоянным радиусом  $R$ ;

- выход из поворота, когда углы поворота управляемых колес  $\alpha_B, \alpha_H, \alpha_{CP}$  уменьшаются ( $\omega_B < 0$ ), при этом происходит движение по кривой переменного радиуса  $R$ , возрастающего от некоторого минимального значения  $R_{min}$  до бесконечного значения.

На всех трех участках происходит нарастание курсового угла машины  $\beta$ . Курсовой угол  $\beta$  – это угол между начальным направлением движения машины (в момент входа в поворот) и направлением движения через некоторое время  $t$  от начала маневра

$$\beta = \int \frac{v dt}{R}. \quad (5)$$

При постоянной скорости поступательного движения машины  $v$

$$\beta = v \int \frac{dt}{R}. \quad (6)$$

Очевидно, что в момент начала маневра поворота (в момент начала входа в поворот)  $\beta = 0$ , а в момент завершения маневра поворота на  $180^\circ$  ( $\pi$  рад.) курсовой угол равен  $180^\circ$  ( $\pi$  рад.).

Увод колесной машины в боковом направлении будет происходить при положительном ускорении бокового скольжения, когда

$$\frac{v^2}{R} > g\varphi. \quad (7)$$

При больших радиусах в начале и в конце маневра поворота увод в боковом направлении отсутствует. Увод может начаться при входе в поворот, когда

$$R = \frac{v^2}{g\varphi}. \quad (8)$$

Если на всем протяжении участка входа в поворот выполняется условие (7), то увод в боковом направлении не будет происходить и на других участках поворота.

Предположим, что значение коэффициента сцепления в боковом направлении  $\varphi$  настолько мало, что радиус, определенный по формуле (8), будет больше минимального радиуса, при котором совершается установившийся поворот по круговой кривой. На участке входа в поворот сначала движение будет происходить без увода в боковом направлении, при этом радиус поворота центра тяжести будет больше значения, определенного по формуле (8). Значение радиуса  $R$  определяется по формулам (2), (3) и (4) в зависимости от угла поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$ , задаваемого линейной функцией времени  $\alpha_B = \alpha_{B0} + \omega_B t$ , при  $\alpha_{B0} = 0$ ,  $\omega_B > 0$ . Курсовой угол  $\beta$  определяется по формуле (6) при начальном условии  $\beta_0 = 0$ . Отсчет времени начинается при курсовом угле  $\beta_0 = 0$ .

В момент времени  $t = t_1$ , когда радиус поворота центра тяжести станет равен значению, определенному по формуле (8), при некотором курсовом угле  $\beta_1$  начнется увод машины в боковом направлении, а так как радиус поворота центра тяжести убывает, то согласно выражению (1),

ускорение бокового скольжения  $a$  нарастает. Скорость бокового скольжения  $u$  определяется от ускорения  $a$  по известной формуле [8]

$$u = \int a dt . \quad (9)$$

Интегрированием скорости бокового скольжения  $u$  найдем величину увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$

$$\Delta l = \int u dt . \quad (10)$$

Начальные условия при интегрировании выражений (9) и (10) нулевые, то есть при  $t = 0$   $u_0 = 0$ ,  $\Delta l_0 = 0$ . Отсчет времени начинается при курсовом угле  $\beta_1$ , который определяется по формуле (6) при начальном условии  $\beta_0 = 0$ . При курсовом угле  $\beta_1$  угол поворота внутреннего управляемого колеса равен  $\alpha_{B1} = \omega_B t_1$ ,  $\omega_B > 0$ .

В момент времени  $t = t_2$ , когда радиус поворота центра тяжести станет равен минимальному радиусу (радиусу установившегося поворота), при некотором курсовом угле  $\beta_2$  движение начнется по круговой кривой с постоянным радиусом поворота центра тяжести машины  $R_{\min}$ . При этом согласно выражению (1), ускорение бокового скольжения  $a$  станет постоянным. Скорость бокового скольжения  $u$  будет равна

$$u = at + u_0 , \quad (11)$$

где  $u_0$  – скорость бокового скольжения при курсовом угле  $\beta_2$ , м/с.

Интегрированием скорости бокового скольжения  $u$  найдем величину увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$

$$\Delta l = 0,5at^2 + u_0 t + \Delta l_0 , \quad (12)$$

где  $\Delta l_0$  – величина увода колесной машины в боковом направлении при курсовом угле  $\beta_2$ , м

Отсчет времени для формул (11) и (12) начинается при курсовом угле  $\beta_2$ , который определяется по формуле (6) при начальном условии  $\beta_0 = \beta_1$ . При курсовом угле  $\beta_2$  угол поворота внутреннего управляемого колеса равен  $\alpha_{B2} = \alpha_{B1} + \omega_B t_2$ ,  $\omega_B > 0$ .

Так как движение по круговой кривой на участке установившегося поворота происходит при постоянном радиусе  $R_{\min}$ , то из выражения (6)

$$\beta = \frac{vt}{R_{\min}} + \beta_0 . \quad (13)$$

Начальное значение курсового угла  $\beta_0$  для участка круговой кривой равно  $\beta_2$ , то есть  $\beta_0 = \beta_2$

Если принять траекторию поворота симметричной, то курсовой угол  $\beta_3$ , при котором заканчивается движение по круговой кривой и начинается участок выхода из поворота, равен  $\beta_3 = \pi - \beta_2$ . Подставим это выражение в формулу (13)

$$\beta_3 = \pi - \beta_2 = \frac{vt_3}{R_{\min}} + \beta_2 , \quad (14)$$

где  $t_3$  – время движения по круговой кривой, с.

Преобразуем уравнение (14)

$$\beta_3 - \beta_2 = \pi - 2\beta_2 = \frac{vt_3}{R_{\min}} . \quad (15)$$

Из формулы (15) можно найти время движения по круговой кривой  $t_K$

$$t_3 = \frac{\pi - 2\beta_2}{v} R_{\min}. \quad (16)$$

Скорость бокового скольжения  $u$  и увод колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$  на участке выхода из поворота определяются по формулам (9) и (10) при начальных значениях  $u_0$  и  $\Delta l_0$  соответствующих курсовому углу  $\beta_3$  и рассчитанных по формулам (11) и (12). Отсчет времени начинается при курсовом угле  $\beta_3$ . При курсовом угле  $\beta_3$  угол поворота внутреннего управляемого колеса равен  $\alpha_{B3} = \alpha_{B2}$ , так как в пределах круговой кривой  $\omega_B = 0$ .

На участке выхода из поворота в момент времени  $t = t_4$  ускорение бокового скольжения  $a$  убывает, так как убывает радиус  $R$ , соответственно снижается и скорость бокового скольжения  $u$ . При некотором курсовом угле  $\beta_4$  скорость бокового скольжения станет равной 0, и боковое скольжение прекратится. При курсовом угле  $\beta_4$  увод колесной машины от скольжения  $\Delta l$  имеет наибольшее значение. При курсовом угле  $\beta_4$  угол поворота внутреннего управляемого колеса равен  $\alpha_{B4} = \alpha_{B3} + \omega_B t_4$ ,  $\omega_B < 0$ .

Курсовой угол  $\beta_5$ , при котором завершается маневр поворота и соответственно участок выхода из поворота определяется по формуле (6), начальное условие интегрирования при этом  $\beta_0 = \beta_4$ . Отсчет времени начинается при курсовом угле  $\beta_4$ . При маневре поворота на  $180^\circ$  ( $\pi$  рад.)  $\beta_5 = \pi$ . При курсовом угле  $\beta_5$  угол поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_{B5} = \alpha_{B4} + \omega_B t_5 = 0$ ,  $\omega_B < 0$ ,  $t_5$  – продолжительность периода изменения курсового угла от  $\beta_4$  до  $\beta_5$ , с.

Моделирование бокового скольжения колесной машины при повороте, на примере трактора Беларус-80.1, выполнили в программе SimInTech [9, 10]. При этом приняли следующие исходные данные. Для трактора Беларус-80.1:  $L = 2,37$  м,  $B = 1,02$  м,  $b = 0,72$  м [11]. Скорость поступательного движения ( $v = 1,78$  м/с), угловая скорость поворота внутреннего управляемого колеса ( $\omega_B = 0,18$  с<sup>-1</sup>), коэффициент сцепления в боковом направлении ( $\varphi = 0,08$ ) приняты постоянными. Математическая модель поворота колесной машины в программе SimInTech приведена на рисунке 2. Влияние уклонов опорной поверхности не учитывали.

При  $\varphi = 0,08$  по формуле (6) найдем радиус, при котором начинается боковое скольжение  $R = 1,78^2 / (9,81 \cdot 0,08) = 4,04$  м. Согласно [5] минимальное значение радиуса составляет 3,33 м, а значит, что при принятых условиях будет боковое скольжение.

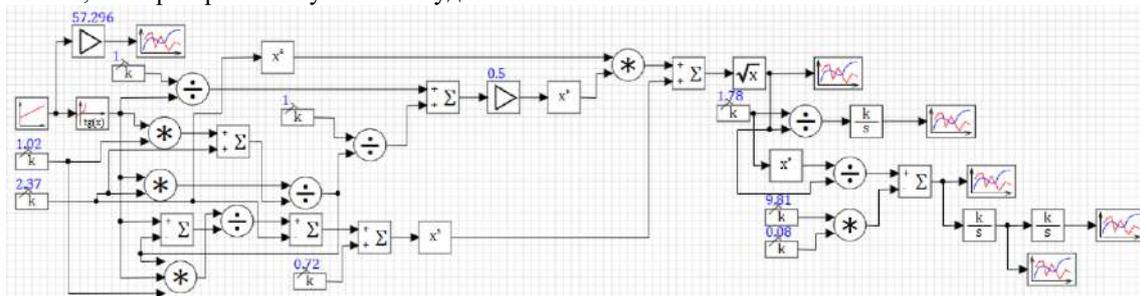
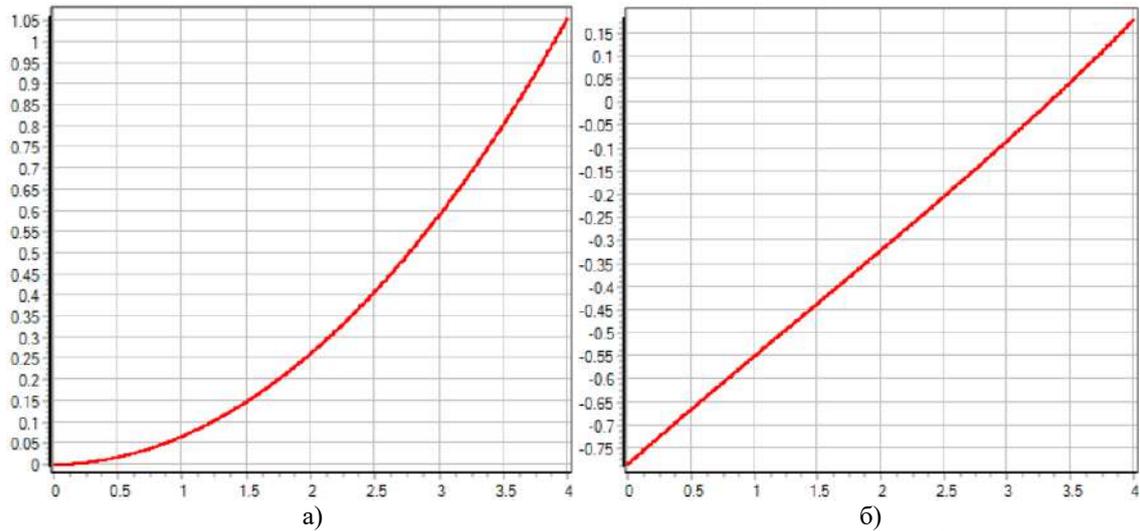


Рисунок 2 – Математическая модель бокового скольжения колесной машины при повороте в программе SimInTech

**Результаты и обсуждение.** Для участка входа в поворот до момента времени  $t = t_1$ , при котором радиус  $R$  примет значение 4,04 м и соответственно ускорение бокового скольжения  $a$  примет значение 0 и меняет знак с минуса на плюс, начальные условия такие  $\alpha_{B0} = 0$ ,  $\omega_B > 0$ ,  $\beta_0 = 0$ . Так как боковое скольжение еще отсутствует по причине большого радиуса  $R$ , то

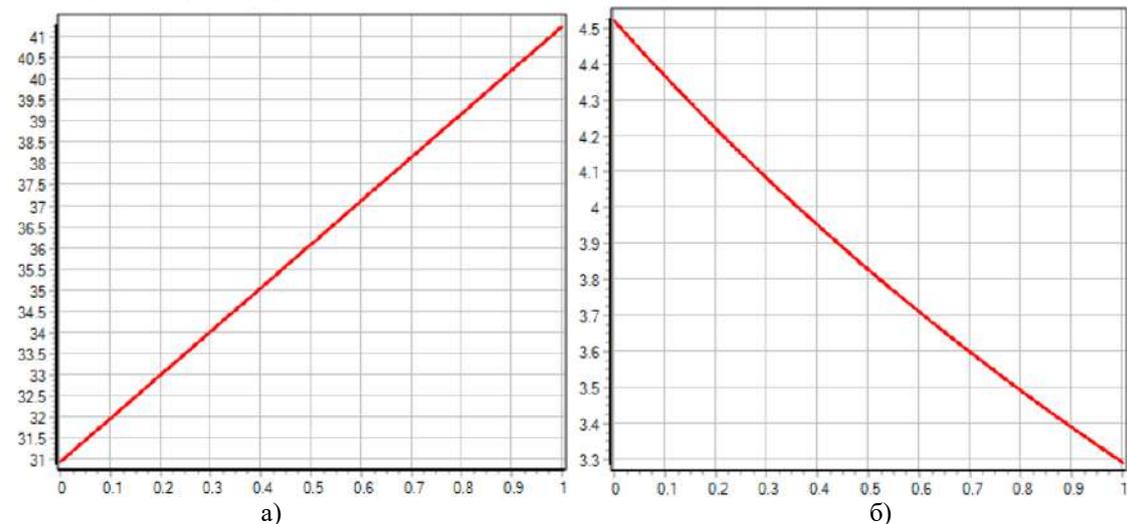
определение скорости бокового скольжения  $u$  и увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$  не имеет смысла, а следовательно  $u_0$  и  $\Delta l_0$  задавать не надо. На рисунке 3 приведены графики зависимостей курсового угла  $\beta$  и ускорения бокового скольжения  $a$  от времени  $t$ .



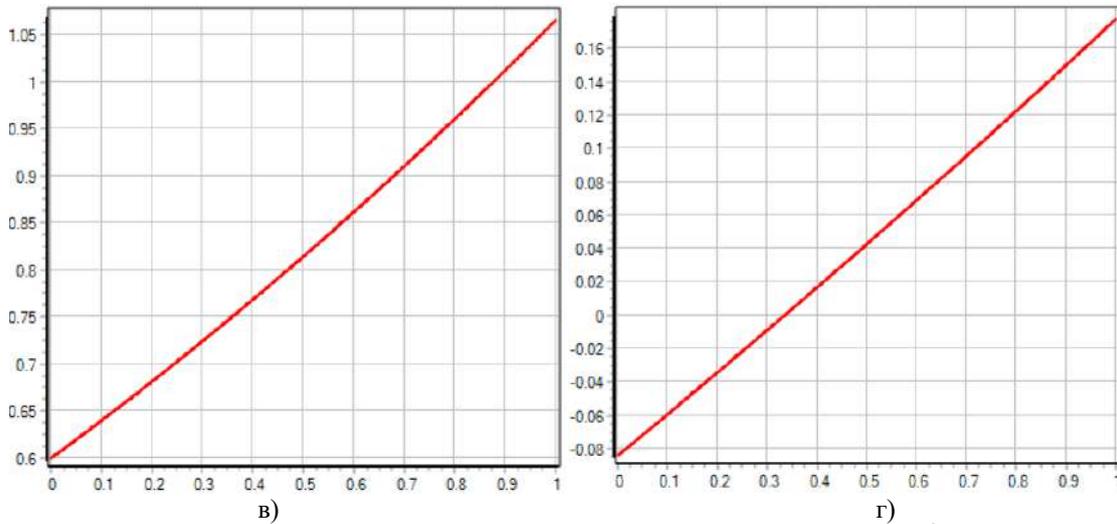
а – курсовой угол, рад.; б – ускорение бокового скольжения,  $m/s^2$   
 Рисунок 3 – Графики зависимостей курсового угла  $\beta$  и ускорения бокового скольжения  $a$  от времени  $t$  (курсвой угол от 0 до 0,74 рад.)

На графиках рисунка 3 видно, что боковое скольжение начинается в момент времени 3,3 с (рисунок 3б), когда ускорение бокового скольжения равно 0, при этом курсовой угол составляет 0,73 рад. или  $41,8^\circ$  (рисунок 3а).

Для более точного определения характеристик участка входа в поворот выполнили моделирование в диапазоне времени 3...4 с от начала маневра. Начальные условия:  $\alpha_{B0} = 0,18 \cdot 3 = 0,54$ ,  $\omega_B > 0$ ,  $\beta_0 = 0,60$  рад. Результаты представлены на рисунке 4.



а – угол поворота внутреннего управляемого колеса, град.; б – радиус поворота центра тяжести машины, м;



в – курсовой угол, рад., г – ускорение бокового скольжения,  $\text{м/с}^2$

Рисунок 4 – Графики зависимостей угла поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$ , радиуса поворота центра тяжести машины  $R$ , курсового угла  $\beta$  и ускорения бокового скольжения  $a$  от времени  $t$  в диапазоне времени  $3 \dots 4$  с от начала маневра (курсовой угол от 0,60 до 0,74 рад.)

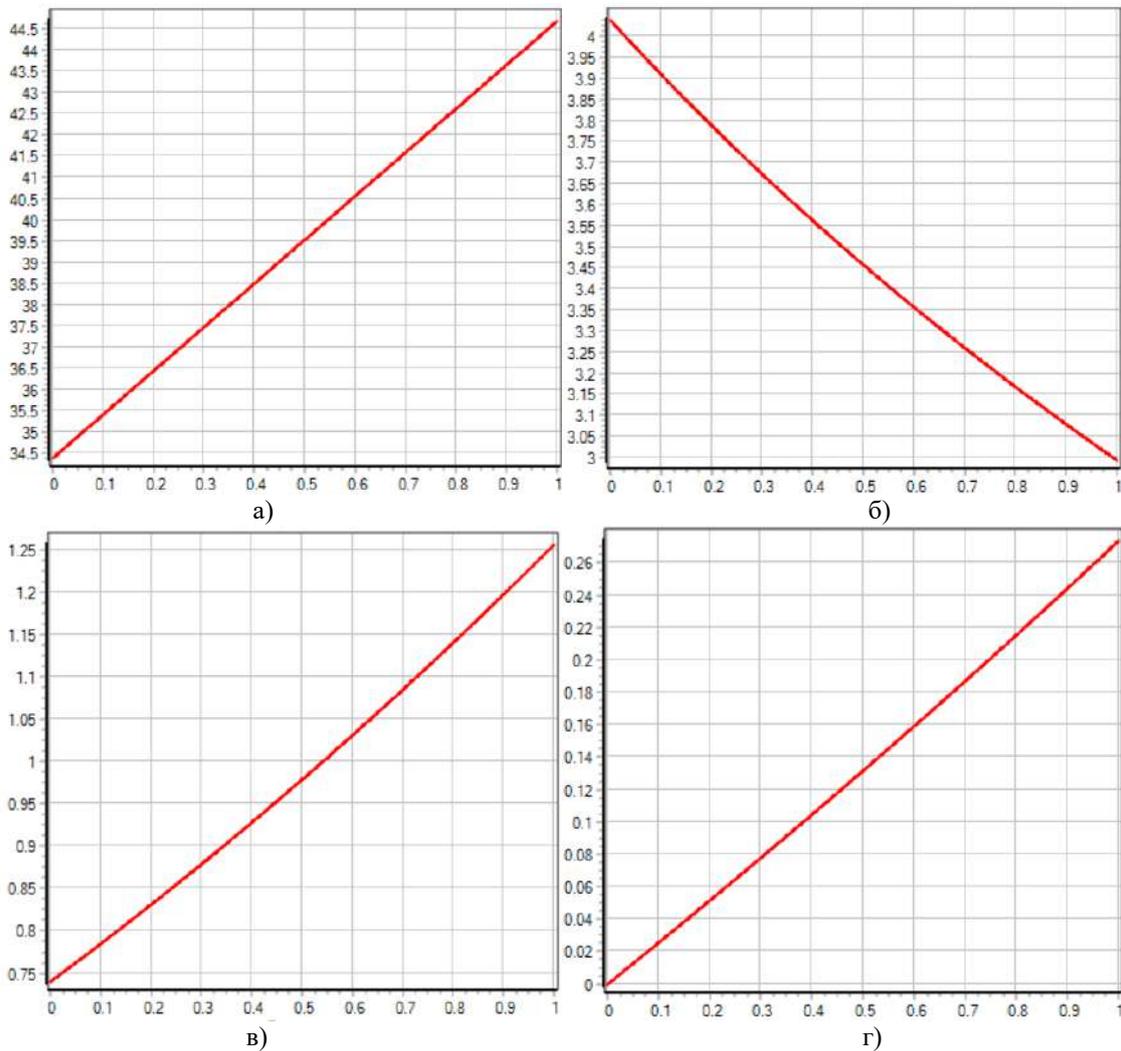
По графикам рисунка 4 установили, что боковое скольжение начинается в момент времени 3,32 с (рисунок 4г) при курсовом угле 0,74 рад. или  $42,4^\circ$  (рисунок 4в). Радиус поворота центра тяжести машины в момент начала бокового скольжения составляет 4,04 м (рисунок 4б) при угле поворота внутреннего управляемого колеса  $34,4^\circ$  (рисунок 4а). Расстояние, которое проходит машина за время 3,32 с, составляет  $3,32 \cdot 1,78 = 5,91$  м.

Для части участка входа в поворот, в пределах которого происходит боковое скольжение, начальные условия:  $\alpha_{B0} = 3,32 \cdot 0,18 = 0,60$ ,  $\omega_B > 0$ ,  $\beta_0 = 0,74$ ,  $u_0 = 0$ ,  $\Delta l_0 = 0$ . Результаты моделирования представлены на рисунках 5 и 6.

По графикам рисунка 5 установили, что угол поворота внутреннего управляемого колеса  $40^\circ$  достигается через 0,53 с (рисунок 5а) при этом радиус поворота центра тяжести машины – 3,41 м (рисунок 5б), курсовой угол равен 1,0 рад. (рисунок 5в), ускорение бокового скольжения –  $0,145 \text{ м/с}^2$  (рисунок 5г). По графикам рисунка 6 видно, что скорость бокового скольжения при  $t = 0,53$  с составляет 0,038 м/с (рисунок 6а), а увод машины в боковом направлении равен 0,007 м (рисунок 6б). Расстояние, которое проходит машина за время 0,53 с, составляет  $0,53 \cdot 1,78 = 0,94$  м, а длина участка входа в поворот  $5,91 + 0,94 = 6,85$  м.

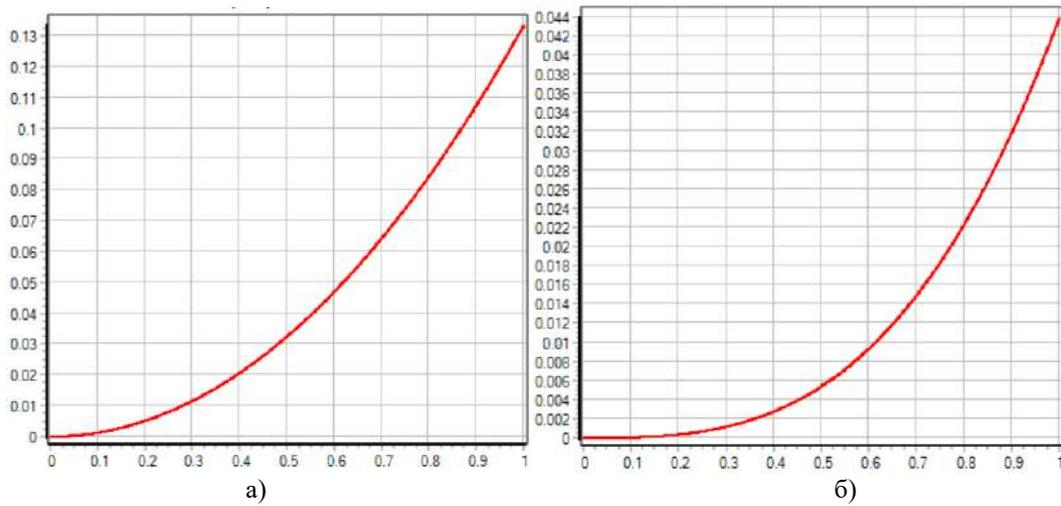
Для участка установившегося поворота начальные условия:  $\alpha_{B0} = 0,699$ ,  $\omega_B = 0$ ,  $\beta_0 = 1,0$ ,  $u_0 = 0,038$ ,  $\Delta l_0 = 0,007$ . Результаты моделирования представлены на рисунке 7. Участок установившегося поворота соответствует значениям курсового угла от 1,0 рад. до  $\pi - 1 = 2,14$  рад.

На участке установившегося поворота угол поворота внутреннего управляемого колеса, радиус поворота центра тяжести машины и ускорение бокового скольжения не изменяются (рисунок 7б). Установившийся поворот заканчивается при курсовом угле 2,14 рад. По графику рисунка 7а находим время движения на участке установившегося поворота, оно составляет 2,2 с. Это время можно рассчитать по формуле (16)  $t_3 = 3,41(3,14 - 2 \cdot 1) / 1,78 = 2,18$  с. Протяженность участка установившегося поворота составляет  $2,18 \cdot 1,78 = 3,88$  м или  $1,14 \cdot 3,41 = 3,89$  м. Согласно графику рисунка 7в скорость бокового скольжения в конце участка установившегося поворота равна 0,36 м/с, увод колесной машины в боковом направлении – 0,43 м (рисунок 7г).

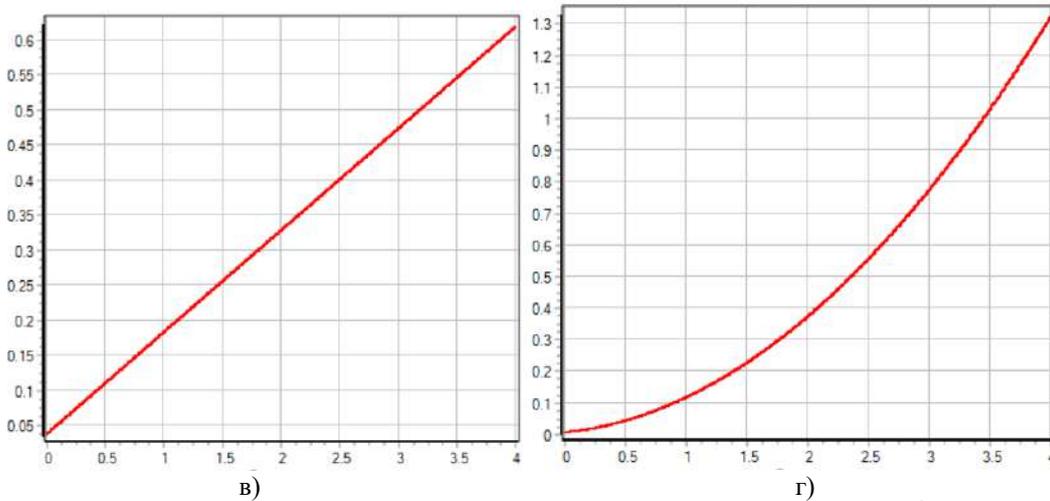
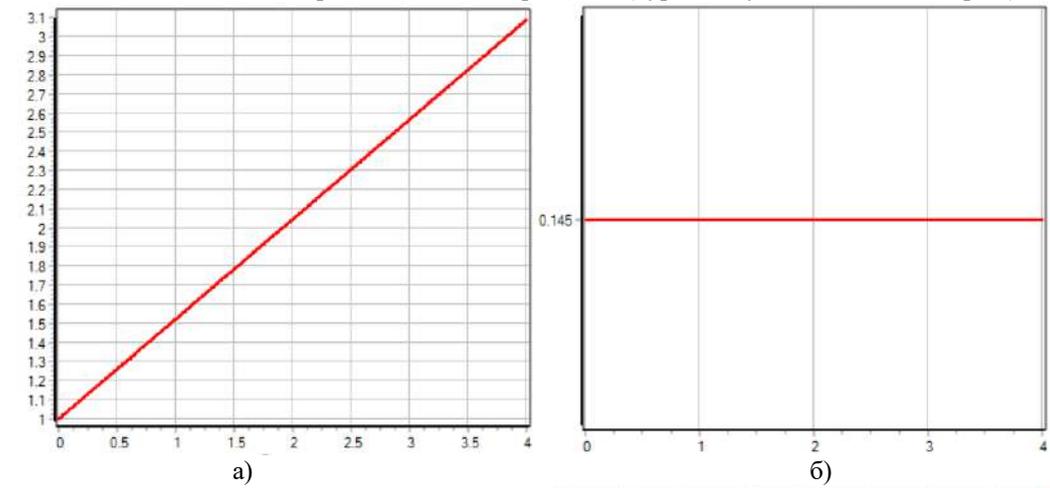


а – угол поворота внутреннего управляемого колеса, град.; б – радиус поворота центра тяжести машины, м; в – курсовой угол, рад., г – ускорение бокового скольжения,  $\text{м/с}^2$   
 Рисунок 5 – Графики зависимостей угла поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$ , радиуса поворота центра тяжести машины  $R$ , курсового угла  $\beta$  и ускорения бокового скольжения  $a$  от времени  $t$  (курсовой угол от 0,74 до 1,0 рад.)

Скорость бокового скольжения и увод колесной машины в боковом направлении в конце участка установившегося поворота можно рассчитать по формулам (11) и (12):  
 $u = 0,145 \cdot 2,18 + 0,038 = 0,354 \text{ м/с}$ ;  $\Delta l = 0,5 \cdot 0,145 \cdot 2,18^2 + 0,038 \cdot 2,18 + 0,007 = 0,434 \text{ м}$ .  
 Для части участка выхода из поворота, в пределах которого происходит боковое скольжение, начальные условия:  $\alpha_{B0} = 0,699$ ,  $\omega_B < 0$ ,  $\beta_0 = 2,14$ ,  $u_0 = 0,36$ ,  $\Delta l_0 = 0,43$ . Результаты моделирования представлены на рисунках 8 и 9.

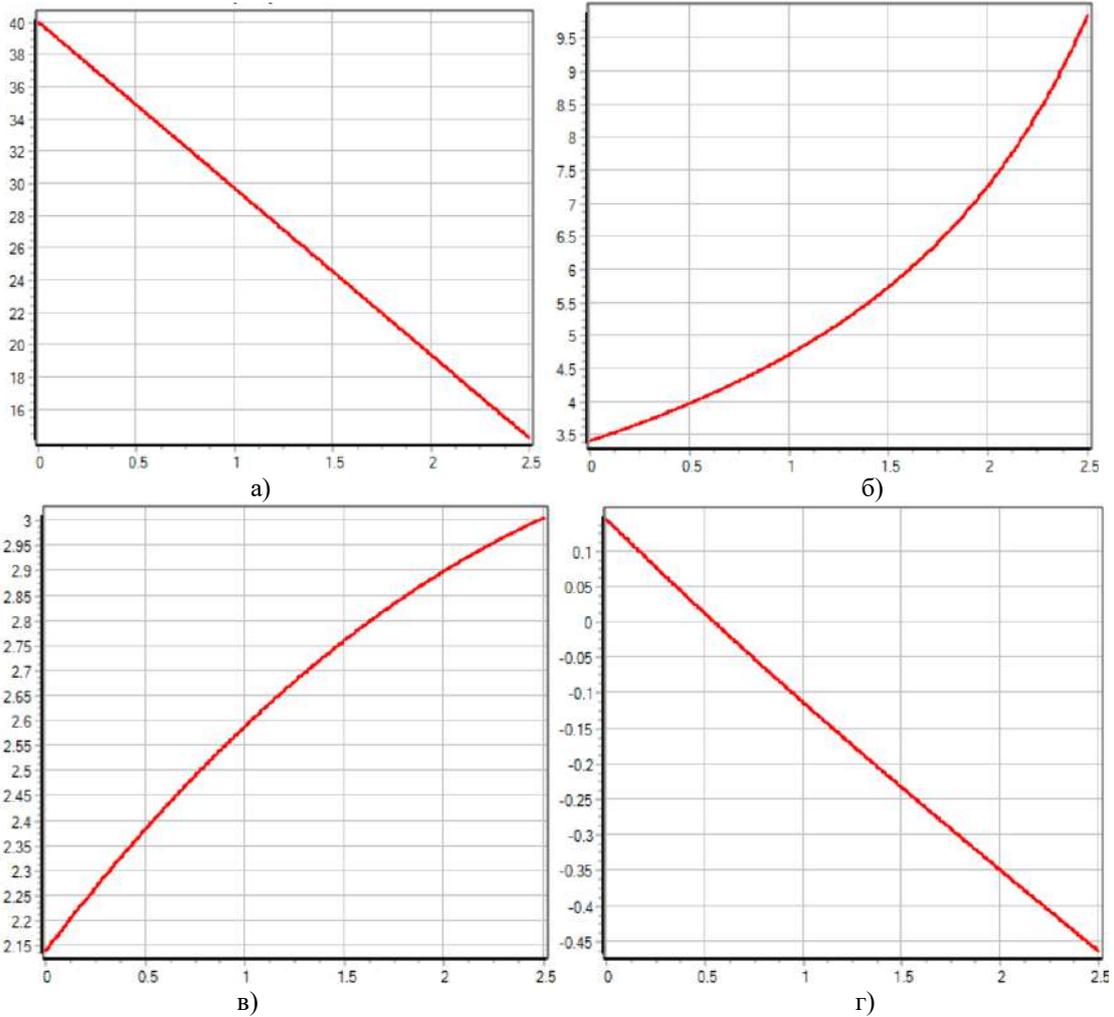


а – скорость бокового скольжения, м/с; б – увод колесной машины в боковом направлении, м  
 Рисунок 6 – Графики зависимостей скорости бокового скольжения  $u$  и увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$  от времени  $t$  (курсовой угол от 0,74 до 1,0 рад.)

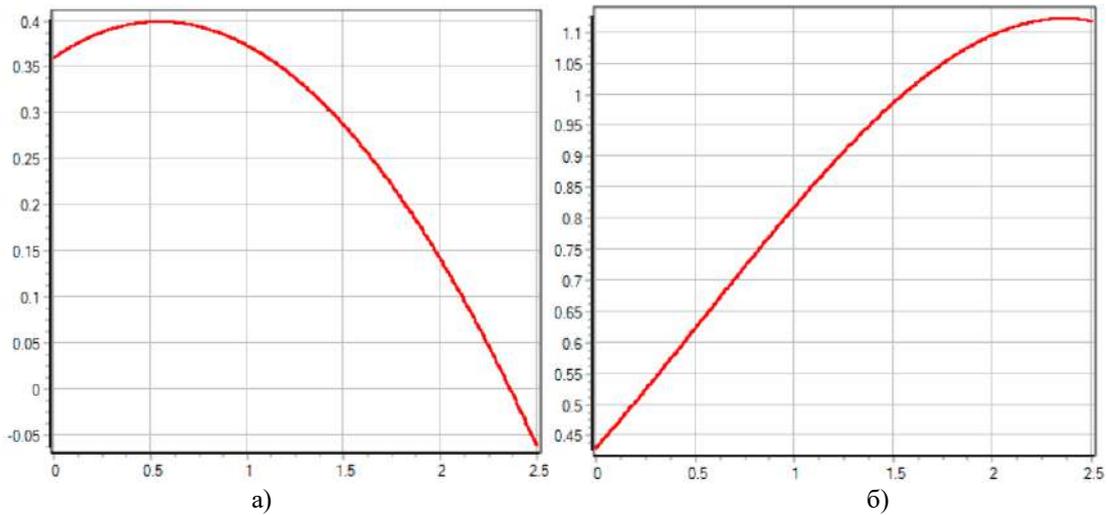


а – курсовой угол, рад., б – ускорение бокового скольжения, м/с<sup>2</sup>:

$v$  – скорость бокового скольжения, м/с;  $\gamma$  – увод колесной машины в боковом направлении, м  
 Рисунок 7 – Графики зависимостей курсового угла  $\beta$ , ускорения бокового скольжения  $a$ , скорости бокового скольжения  $v$  и увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$  от времени  $t$  (курсовой угол от 1,0 до 2,14 рад.)



а – угол поворота внутреннего управляемого колеса, град.; б – радиус поворота центра тяжести машины, м; в – курсовой угол, рад., г – ускорение бокового скольжения,  $\text{м/с}^2$   
 Рисунок 8 – Графики зависимостей угла поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$ , радиуса поворота центра тяжести машины  $R$ , курсового угла  $\beta$  и ускорения бокового скольжения  $a$  от времени  $t$  (курсовой угол от 2,14 до 2,99 рад.)

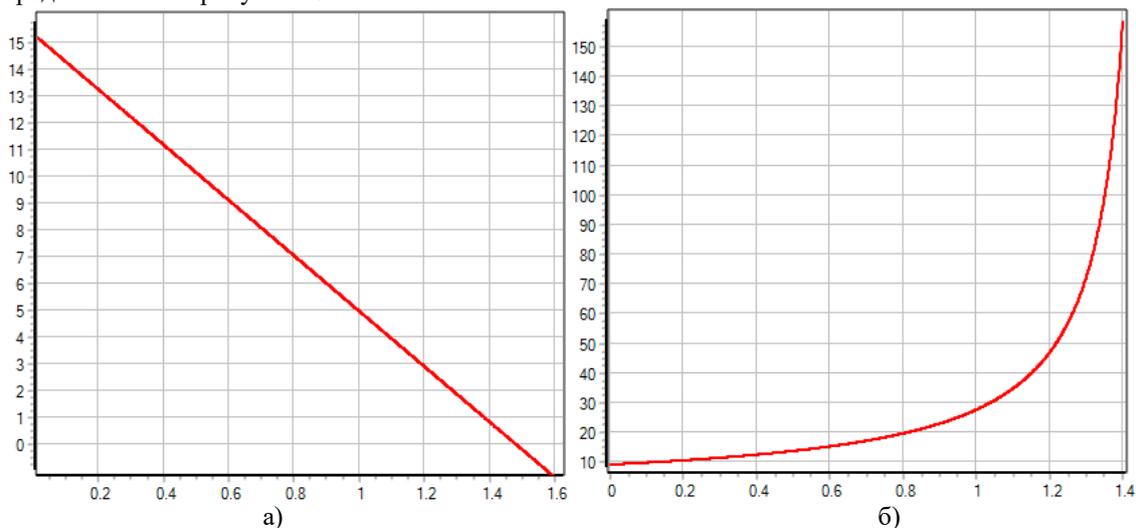


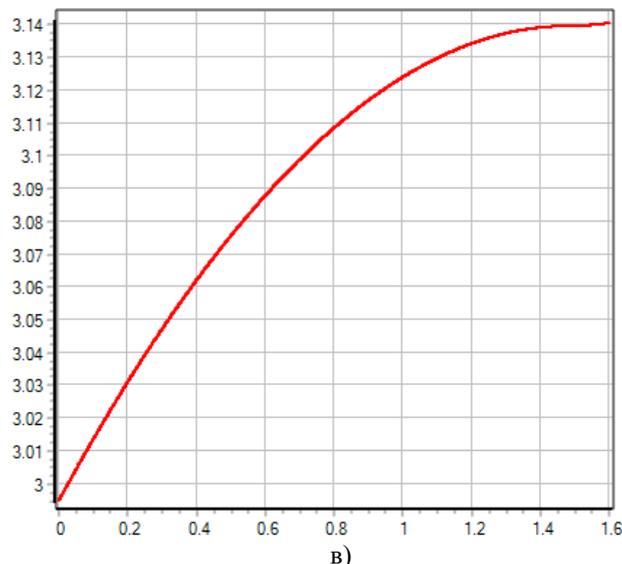
а – скорость бокового скольжения, м/с; б – увод колесной машины в боковом направлении, м  
 Рисунок 9 – Графики зависимостей скорости бокового скольжения  $u$  и увода колесной машины в боковом направлении  $\Delta l$  от времени  $t$  (курсовой угол от 2,14 до 2,99 рад.)

Боковое скольжение прекратится через 2,37 с (рисунок 9а, скорость бокового скольжения равна 0) от начала выхода из поворота, при этом угол поворота внутреннего управляемого колеса составляет  $15,3^\circ$  (рисунок 8а), а радиус поворота центра тяжести машины – 9,3 м (рисунок 8б). По графику рисунка 8в курсовой угол в момент времени 2,37 с составляет 2,99 рад. Увод колесной машины в боковом направлении составляет 1,12 м (рисунок 9б). Расстояние, которое прошла машина за 2,37 с равно  $2,37 \cdot 1,78 = 4,22$  м.

В момент времени 0,53 с при курсовом угле 2,40 рад. (рисунок 8в) от начала выхода из поворота скорость бокового скольжения достигает наибольшего значения равного 0,40 м/с (рисунок 9а). Именно в этот момент времени ускорение бокового скольжения равно 0 (рисунок 8г). Радиус поворота центра тяжести машины при  $t = 0,53$  с равен 4,04 м (рисунок 8б).

Для части участка выхода из поворота, в пределах которого не происходит боковое скольжение, начальные условия:  $\alpha_{B0} = 0,267$ ,  $\omega_B < 0$ ,  $\beta_0 = 2,99$ . Результаты моделирования представлены на рисунке 10.





а – угол поворота внутреннего управляемого колеса, град.; б – радиус поворота центра тяжести машины, м; в – курсовой угол, рад.

Рисунок 10 – Графики зависимостей угла поворота внутреннего управляемого колеса  $\alpha_B$ , радиуса поворота центра тяжести машины  $R$  и курсового угла  $\beta$  от времени  $t$  (курсовой угол от 2,99 до 3,14 рад.)

По графику рисунка 10а видно, что при  $t = 1,48$  с угол поворота внутреннего управляемого колеса равен 0 и соответственно завершён маневр поворота, курсовой угол при этом составляет 3,14 рад., то есть  $180^\circ$  (рисунок 10в). Радиус поворота центра тяжести машины на рассматриваемом участке резко возрастает и стремится к бесконечности (рисунок 10б). Такие показатели как ускорение и скорость бокового скольжения, увод машины в боковом направлении на рассматриваемом участке являются постоянными:  $a = 0, u = 0, \Delta l = 1,12$  м. Расстояние, которое проходит машина за 1,48 с равно  $1,48 \cdot 1,78 = 2,63$  м. Длина участка выхода из поворота равна  $4,22 + 2,63 = 6,85$  м.

Длина траектории разворота колесной машины на  $180^\circ$  получилась  $6,85 + 3,88 + 6,85 = 17,58$  м. Полное время маневра составило  $3,32 + 0,53 + 2,18 + 2,37 + 1,48 = 9,88$  с.

Полученные результаты математического моделирования бокового скольжения колесной машины при совершении маневра поворота на  $180^\circ$  сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Параметры поворота и бокового скольжения трактора Беларус-80.1 при  $v = 1,78$  м/с,  $\omega_B = 0,18$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi = 0,08$

Курсовой угол $\beta$	Угол поворота внутреннего управляемого колеса $\alpha_B$	Радиус поворота центра тяжести $R$ , м	Ускорение бокового скольжения $a$ , м/с <sup>2</sup>	Скорость бокового скольжения $u$ , м/с	Увод в боковом направлении $\Delta l$ , м
0	0	$\infty$	0	0	0
42,4° (0,74 рад.)	34,4°	4,04	0	0	0
57,3° (1 рад.)	40°	3,41	0,145	0,018	0,007
122,6° (2,14 рад.)	40°	3,41	0,145	0,36	0,43
137,5° (2,40 рад.)	34,4°	4,04	0	0,4	0,63
171,3° (2,99 рад.)	15,3°	9,3	0	0	1,12
180° (3,14 рад.)	0	$\infty$	0	0	1,12

Из таблицы 1 видно, что увод машины в боковом направлении начинается в конце участка входа в поворот, когда радиус поворота центра тяжести машины существенно уменьшился, но по причине еще малых значений ускорения и скорости бокового скольжения увод на этом участке не существенный (для рассмотренного примера менее 1 см). В пределах участка установившегося поворота (при постоянном радиусе поворота центра тяжести машины) ускорение бокового скольжения является величиной постоянной, но скорость бокового скольжения нарастает и соответственно нарастает и увод машины в боковом направлении (для рассмотренного примера до 43 см). В начале участка выхода из поворота при несущественном возрастании радиуса поворота центра тяжести машины ускорение бокового скольжения уменьшается, но скорость бокового скольжения продолжает расти до момента, пока ускорение бокового скольжения не станет равным 0. По мере движения машины на участке выхода из поворота радиус поворота центра тяжести машины растет, ускорение бокового скольжения будет отрицательным и направлено в противоположную сторону от направления скорости бокового скольжения, последняя при этом снижается, но увод машины в боковом направлении продолжается, достигая максимального значения (для рассмотренного примера 1,12 м) при скорости бокового скольжения равной 0. Таким образом, увод колесной машины в боковом направлении происходит на участках установившегося поворота и выхода из поворота, а причина увода – ускорение бокового скольжения формируется на участке входа в поворот.

Увод колесной машины в боковом направлении является не желательным процессом, приводящим к искажению траектории поворота, увеличению габаритов поворота, возникновению аварийных ситуаций. Для исключения увода машины в боковом направлении можно уменьшить скорость поступательного движения, что приведет к возрастанию продолжительности выполнения маневра, или совершить маневр по кривой с большим радиусом, что приведет как к увеличению длины траектории поворота, так и к возрастанию продолжительности маневра.

Увеличение расстояния между осями шкворней (шкворневой колеи) колесного трактора согласно формулам (2) и (3) обеспечивает повышение радиуса поворота центра тяжести машины, а следовательно снижает вероятность возникновения увода в боковом направлении. Согласно [5] при расстоянии между осями шкворней трактора Беларус-80.1 – 1,22 м [11] минимальный радиус поворота центра тяжести равен 4,17 м, а значит при условиях, рассмотренных в настоящей работе, увод в боковом направлении не возможен.

#### **Выводы:**

1. При совершении колесной машиной маневра поворота в результате действия центробежной силы при малых значениях коэффициента сцепления колес с опорной поверхностью в боковом направлении может возникнуть увод машины в боковом направлении, приводящий к искажению траектории поворота, увеличению габаритов поворота, возникновению аварийных ситуаций.

2. Причиной увода колесной машины в боковом направлении является возникновение ускорения бокового скольжения, величина которого зависит от скорости поступательного движения, радиуса поворота центра тяжести машины и коэффициента сцепления колес с опорной поверхностью в боковом направлении.

3. Причина увода колесной машины в боковом направлении – ускорение бокового скольжения формируется на участке входа в поворот, когда радиус поворота центра тяжести машины уменьшается.

4. Увод колесной машины в боковом направлении происходит на участках установившегося поворота при постоянном радиусе поворота центра тяжести машины и выхода из поворота. Этому способствует наличие скорости бокового скольжения, которая на участке выхода из поворота достигает своего наибольшего значения в момент, когда ускорение бокового скольжения станет равным 0. Наибольшее значение увода машины в боковом направлении достигается в момент, когда скорость бокового скольжения станет равной 0. После этого момента нарастание бокового увода прекращается.

5. Результаты моделирования бокового скольжения колесной машины, на примере трактора Беларус-80.1 (при  $v=1,78$  м/с,  $\omega_b=0,18$  с<sup>-1</sup>,  $\varphi=0,08$ ), показали, что ускорение бокового скольжения имеет максимальное значение, равное  $0,145$  м/с<sup>2</sup>, в пределах участка установившегося

поворота; скорость бокового скольжения в пределах участка установившегося поворота возрастает в 20 раз (от 0,018 м/с до 0,36 м/с) и достигает максимума (0,40 м/с) на участке выхода из поворота; увод машины в боковом направлении в пределах участка установившегося поворота увеличивается более, чем в 60 раз (от 7 мм до 43 см) и достигает максимального значения (1,12 м) на участке выхода из поворота, в момент когда скорость бокового скольжения становится равной 0.

6. Для исключения увода машины в боковом направлении можно уменьшить скорость поступательного движения, что приведет к возрастанию продолжительности выполнения маневра, или совершить маневр по кривой с большим радиусом, что приведет как к увеличению длины траектории поворота, так и к возрастанию продолжительности маневра. Увеличение расстояния между осями шкворней (шкворневой колеи) колесного трактора обеспечивает повышение радиуса поворота центра тяжести машины, а следовательно снижает вероятность возникновения увода в боковом направлении.

#### Список источников

1. Беляев А.Н. Повышение эффективности работы машинно-тракторных агрегатов на базе интегральных универсально-пропашных колесных тракторов: дис. ... д-ра техн. наук: 05.20.01 / А.Н. Беляев. Мичуринск-научград, 2019. 440 с.
2. Жаков А.О., Трояновская И.П. Модель отклонения трактора от прямолинейного движения под действием внешних нецентральных сил. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2020. Т. 20. № 3. С. 15-23.
3. Носков Н.К., Позин Б.М., Трояновская И.П. Математическая модель бокового увода трактора. Известия МГТУ МАМИ. 2017. № 1(31). С. 35-39.
4. Титов С.А., Трояновская И.П., Носков Н.К. Обобщенная модель стационарного поворота произвольного транспортного средства. Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Машиностроение. 2017. Т. 17. № 4. С. 38-47.
5. Беляев А.Н., Оробинский В.И., Химченко А.В. и др. Определение положения мгновенного центра поворота и радиуса поворота при изменении ширины колеи колёсного трактора // Наука в Центральной России. 2024. № 3 (69). С. 73–84.
6. Reza J. Vehicle Dynamics: Theory and Application. 2<sup>nd</sup> edition. New York: Springer International Publishing, 2008. 1045 p.
7. Гуськов В.В., Велев Н.Н., Атаманов Ю.Е. и др. Тракторы: теория: учебник для вузов по специальности «Автомобили и тракторы». М: Машиностроение, 1988. 374 с.
8. Гулевский В.А., Шацкий В.П. Краткий курс теоретической механики. Воронеж: ФГБОУ ВПО Воронежский ГАУ, 2009. 178 с.
9. Среда динамического моделирования SimInTech [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://simintech.ru>.
10. Пиляев С.Н., Кузьменко С.В., Аксенов И.И. Динамическое моделирование сложных технических систем // Наука, образование и инновации в современном мире (НОИ-2019): матер. нац. научной конф. В 2-х ч., г. Воронеж, 17-18 апреля 2019 г.). Воронеж: ФГБОУ ВО Воронежский ГАУ, 2019. Ч. I. С. 223–228.
11. Руководство по эксплуатации тракторов «Беларус-80.1/82.1/820» // ООО «Минский тракторный завод», 2015. 381 с.

#### References

1. Belyaev A.N. Improving the efficiency of machine-tractor units based on integrated universal-row-crop wheeled tractors: dis. ... Doctor of Technical Sciences: 05.20.01 / A.N. Belyaev. Michurinsk-science city, 2019. 440 p.
2. Zhakov A.O., Troyanovskaya I.P. Model of tractor deviation from rectilinear motion under the action of external non-central forces. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mechanical Engineering. 2020. Vol. 20. No. 3. P. 15-23.
3. Noskov N.K., Pozin B.M., Troyanovskaya I.P. Mathematical model of tractor lateral slip. Bulletin of MSTU MAMI. 2017. No. 1 (31). P. 35-39.

4. Titov S.A., Troyanovskaya I.P., Noskov N.K. Generalized model of stationary turn of an arbitrary vehicle. Bulletin of the South Ural State University. Series: Mechanical Engineering. 2017. Vol. 17. No. 4. P. 38-47.
5. Belyaev A.N., Orobinsky V.I., Khimchenko A.V. et al. Determination of the position of the instantaneous turning center and turning radius when changing the track width of a wheeled tractor // Science in Central Russia. 2024. No. 3 (69). P. 73–84.
6. Reza J. Vehicle Dynamics: Theory and Application. 2nd edition. New York: Springer International Publishing, 2008. 1045 p.
7. Guskov V.V., Velev N.N., Atamanov Yu.E. et al. Tractors: theory: textbook for universities in the specialty "Cars and tractors". Moscow: Mashinostroenie, 1988. 374 p.
8. Gulevsky V.A., Shatsky V.P. Short course in theoretical mechanics. Voronezh: FGBOU VPO Voronezh SAU, 2009. 178 p.
9. SimInTech dynamic modeling environment [Electronic resource]. Access mode: <http://simintech.ru>.
10. Pilyaev S.N., Kuzmenko S.V., Aksenov I.I. Dynamic modeling of complex technical systems // Science, education and innovation in the modern world (NOI-2019): mater. nat. scientific conf. In 2 parts, Voronezh, April 17-18, 2019). Voronezh: FGBOU VO Voronezh SAU, 2019. Part I. P. 223–228.
11. Operation manual for tractors “Belarus-80.1/82.1/820” // Minsk Tractor Plant LLC, 2015. 381 p.

#### **Информация об авторах**

А. Н. Беляев – доктор технических наук, доцент; Д. Н. Афоничев – доктор технических наук, профессор; Т. В. Тришина – кандидат технических наук, доцент; П. В. Шередекин – аспирант.

#### **Information about the authors**

A. Belyaev – Doctor of Technical Sciences, Associate Professor; D. Afonichev – Doctor of Technical Sciences, Professor; T. Trishina – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor; P. Sheredekin – graduate student.

**Вклад авторов:** все авторы сделали эквивалентный вклад в подготовку публикации.

**Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.**

**Contribution of the authors:** all authors have made an equivalent contribution to the preparation of the publication.

**The authors declare no conflict of interest.**

Поступила в редакцию (Received): 13.09.2024      Принята к публикации (Accepted): 16.10.2024